#### 5.4. Технология вычисления интеграла в среде системы MathCad

Функция**int()**вычисляет неопределенные и определенные интегралы

* **int(S)**– возвращает символьное значение неопределенного инте­грала от символьного выражения или массива символьных выражений **S** по переменной, которая автоматически определяется функцией **findsym**. Если **S**– скаляр или матрица, то вычисляется интеграл по переменной **'х'**.
* **int(S, v)**– возвращает неопределенный интеграл от **S** по перемен­ной **v**.
* **int(S, a, b)**– возвращает определенный интеграл от S с пределами интегрирования от **а** до **b,** причем пределы интегрирования могут быть как символьными, так и числовыми.
* **int(S, v, a, b)**– возвращает определенный интеграл от **S** по пере­менной **v** с пределами от **а** до **b.**

**Пример 4.4-1**

|  |
| --- |
| **Пример 4.4-1.** |
| **» int(sin(x)^3, x)**  **ans =**  **- l/3\*sin(x)^2\*cos(x)-2/3\*cos(x)**  **» int(log(2\*x), x)**  **ans =**  **log(2\*x)\*x - x**  **» int((x^2-2)/(x\*3-l), x, l, 2)**  **ans =**  **-inf**  **» int((x^2-2)/(x\*3-l), x, 2, 5)**  **ans =**  **- 2/3\*1og(2) + 2/3\*1og(31) + 2/3\*3^(l/2)\*atan(11/3\*3^(l/2)) -...**  **2/3\*log(7) - 2/3\*3^(1/2)\*atan(5/3\*3^(l/2))**  **» int([x^3 sin(x) exp(x)], x)**  **ans =**  **[ l/4\*x^4, -cos(x), exp(x)]**  **» int(log(sin(x)),x,0,pi/2)**  **ans =**  **-pi/2\*log(2)**  **>>** |

С помощью функции **int()** можно вычислять имеющие аналитическое решение сложных интегралов, например с бесконечными пределами (или одним из пределов), а также кратные интегралы.

**Пример 4.4-2.**

|  |
| --- |
| **Пример 4.4-2.** |
| **» int(log(1+exp(-x),x,0,inf)**  **ans =**  **pi^2/12**  **» syms x a b**  **» int(int(int(x^2 + y^2)\*z, x, 0, a), y, 0, a), z, 0, a)**  **ans =**  **1/3\*a^6**  **>>** |

В системе MatLab вычисление интегралов реализовано численными методами **трапеции**, **Симпсона, Ньютона-Котеса**. Рассмотрим технологию использования этих методов.

Для вычисления интеграла по формуле трапеции в MatLab используется функция **trapz(x,y )**. Эта функция возвращает значение интеграла от функции y=f(x) –



При этом y может быть вектором или матрицей. Длины векторов x и y должны быть одинаковы. Если f(x) – матрица, то функция возвращает вектор значений интеграла каждого столбца матрицы. Если вектор узлов не задан - **trapz(y)**, то в качестве ординат x используются их индексы (x=1:length(y)). Узлы по оси x могут быть и не равноотстоящими.

**Пример 4.4-3. Вычислить значение интеграла методом трапеции.**



|  |
| --- |
| **Пример 4.4-3** |
| **>> x=1 : 0.1 : 2;**  **>>y=log(x);**  **>>trapz(x,)**  **ans=**  **0.3859**  **>>% Точное значение интеграла от функции y=log(x),**  **>>% которое берется аналитически, равно 0.3863**  ***>>*** |

**Пример 4.4-4. Вычислить значение интеграла методом трапеции, если функция f(x) задана вектором y=[1 3 57 9].**



|  |
| --- |
| **Пример 4.4-4** |
| **>>y=[1 3 5 7 9];**  **>>trapz(x,)**  **ans=**  **0.3859**  **>>% Точное значение интеграла от функции y=log(x),**  **>>% которое берется аналитически, равно 0.3863**  **>>** |

**Пример 4.4-5. Вычислить значения интегралов методом трапеции, если функции fi(x) (i=1:5) заданы матрицей y=[1 3 5 ; 3 5 7 ; 4 6 8; 4 7 9; 5 7 10].**



|  |
| --- |
| **Пример 4.4-5** |
| **>>y=[1 3 5 ; 3 5 7 ; 4 6 8; 4 7 9; 5 7 10];**  **>>trapz(y)**  **ans=**  **14 23 31.5**  **>>** |

**Пример 4.4-6. Вычислить значение интеграла методом трапеции, для функции yn=log(xn) с неравномерным шагом по оси x.**



|  |
| --- |
| **Пример 4.4-6** |
| **>>xn=[1:0.1:1.5, 1.6:0.2:2];**  **>>yn=log(xn);**  **>>trapz(x,y)**  **ans=**  **0.3859**  **>>** |

**Пример 4.4-7. Вычислить значение интеграла методом трапеции, если аргумент x и функция f(x) заданы векторами x=[1 3 7 9 10], y=[1 3 5 7 9].**



|  |
| --- |
| **Пример 4.4-7** |
| **>> x=[1 3 7 9 10];**  **>> y=[1 3 5 7 9];**  **>>trapz(x,y)**  **ans=40**  **>>** |

**Пример 4.4-8. Вычислить значение интеграла методом трапеции, если аргумент xзадан вектором x=[1 3 7 9 10], а функция f(x) задана матрицей y=[1 3 5; 3 5 7; 4 6 8; 4 7 9; 5 7 10].**



|  |
| --- |
| **Пример 4.4-8** |
| **>>x=[1 3 7 9 10];**  **>>y=[1 3 5; 3 5 7; 4 6 8; 4 7 9; 5 7 10];**  **>>trapz(x, y)**  **ans=**  **30.5 50 68.5**  **>>** |

Накопительное суммирование по формуле трапеции в MatLab осуществляется с помощью функции **cumtrapz(x,y).** Она возвращает вектор, **i-**й компонент которого представляет сумму первых **i** слагаемых формулы трапеции. Значение функции cumtrapz(x,y) можно рассматривать как дискретный аналог интеграла с переменным верхним пределом.

Для вычисления интеграла по формуле Симпсона в MatLab применяется функция **quad()**. При обращении к ней шаг интегрирования не задается, используется требуемая точность вычисления интеграла. Основную часть вычислений в этой функции выполняет рекурсивная подфункция **quadstep( )**, в которой используется формула Симпсона **(**yi=f(xi),i=0,1,…,n=2m) с небольшим числом узлов: 3 (m=1) и 5 (m=2). Найденные по этим формулам значения сравниваются. Если разница между ними больше допустимой погрешности, отрезок интегрирования разбивается на две равные части, функция quadstep() рекурсивно применяется к каждой половине, и результаты складываются.

Из описания способа вычислений функции quad() вытекает, что невозможно ограничиться заданием значений интегрируемой функции в каких-то заранее известных узлах (как для **trapz()),** а необходимо уметь вычислять ее значения в любой точке интервала интегрирования. Невозможно также использовать остаточный член для оценки точности, достигнутой функцией **quad(),** поскольку неизвестен окончательный шаг h, необходимый при интегрировании. К тому же он не обязательно одинаков на всем отрезке интегрирования.

Минимальная форма обращения к функции – **q=quad(f,a,b)**. В качестве первого аргумента задается указатель на подынтегральную функцию, второй и третий аргументы определяют пределы интегрирования, а указатель f может быть задан одним из способов:

* именем m**-функции**, заключенным в одинарные кавычки;
* указателем @f, где f имя функции;
* строкой, содержащей любую формулу с одной независимой переменной.

Функция quad() допускает задания четвертого входного параметра – абсолютной погрешности eps: q=quad(f, a, b, eps). По умолчанию эта погрешность принимается равной1.0Е10-6. Если задать ее более высокой, (например, 1.0e-16), интеграл будет вычисляться точнее, зато существенно медленнее. О степени замедления можно судить по количеству обращений к вычислению значений подынтегральной функции (f(х)).

Вычисление интеграла аналитическими методами осуществляется в системе MatLab с помощью функции int(f(x), a, b), где f(x) – подынтегральная функция; a, b – пределы интегрирования.

Эта функция может вычислить:

* неопределенный интеграл;
* неопределенный интеграл с символьными переменными ;
* определенный интеграл с символьными значениями пределов интегрирования;
* определенный интеграл от алгебраической функции;
* кратные интегралы;
* несобственные интегралы.

Технология аналитического вычисления интегралов заключается в следующем:

1. Определение символьных переменных с помощью оператора syms.
2. Ввод подынтегрального выражения с присвоением ему имени: y=f(x).
3. Ввод функции int(y), если вычисляется неопределенный интеграл, или функции int(y,a,b), если вычисляется определенный интеграл в пределах [a;b].
4. Получение решения.

**Пример 4.4-9. Вычислить неопределенный интеграл .**



|  |
| --- |
| **Пример 4.4-9** |
| **>>syms x a b**  **>> y=x/(a+b\*x^2);**  **>>int(y)**  **ans =**  **1/(2\*b)\*log(a+b\*x^2)**  **>>** |

**Пример 4.4-10. Вычислить определенный интеграл .**



|  |
| --- |
| **Пример 4.4-10** |
| **>>symsxab**  **>>y=x/(1+x^2);**  **>>int(y, a, b)**  **ans =**  **1/2\*log(1+b^2) – 1/2\*log(1+a^2)**  **>>** |

**Пример 4.4-11. Вычислить определенный интеграл.**

|  |
| --- |
| **Пример 4.4-11** |
| **>>syms x**  **>> y=x/(1+x^2);**  **>>int(y, 1, 5)**  **ans =**  **1/2\*log(13)**  **>>** |

Для получения численного значения интеграла необходимо активизировать строку ответа и нажать **<ENTER>:**

|  |
| --- |
| **ans =1.2825**  **>>** |

**Пример 4.4-12. Вычислить двойной неопределенный интеграл .**



|  |
| --- |
| **Пример 4.4-12** |
| **>>syms x**  **>> y=x/(1+x^2);**  **>> z=int(y)**  **z =**  **-1/2\*log(x-1) – 1/2\*log(x+1)**  **>>int(z)**  **ans =**  **-1/2\*log(x-1)\*(x-1)+x-1/2\*log(x+1)\*(x+1)**  **>>** |

Или

|  |
| --- |
| **Пример 4.4-12** |
| **>>syms x**  **>> y=x/(1+x^2);**  **>>int(int(y))**  **ans =**  **-1/2\*log(x-1)\*(x-1)+x-1/2\*log(x+1)\*(x+1)**  **>>** |